EPF

3bis, Rue Lakanal
92330 SCEAUX
(1)46603331

CONCOURS D'ENTREE DU 20 MAI 1987

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

DUREE 4 Heures COEFFICIENT 5

Dans les exercices et le problème, les figures sont à faire dans un plan rapporté à un repère orthonormé. Dans certains cas, l'unité sera précisée par le texte, dans les autres, la candidate précisera l'unité qu'elle aura choisie.
Dans l'application du barême, on tiendra compte de la clarté et la précision des figures, des explications données au cours des calculs numériques (programmation...), et la candidate devra donner les énoncés complets des théorèmes qu'elle sera amenée à utiliser.

Exercice 1

1) On considère tous les nombres entiers naturels que l'on peut écrire en permutant les chiffres : 1,2,3,4,5.

   a) Combien peut-on former de nombres de cette façon ?

   b) On range ces nombres dans l'ordre croissant.
   Quel est le plus petit ? le plus grand ?
   Quel est le 50ème ?
   Quel rang occupe le nombre 42 513 ?

   c) Quelle est la somme de tous ces nombres ?

2) On considère tous les nombres entiers naturels que l'on peut écrire en permutant les chiffres : 1, 1, 2, 3, 4.

   a) Combien peut-on former de nombres de cette façon ?

   b) On range ces nombres dans l'ordre croissant.
   Quel est le plus petit ? le plus grand ?

Exercice 2

Dans le plan P rapporté à un repère orthonormé, à tout point M(x,y), on fait correspondre son affixe $z = x + iy$.
A tout complexe z, $z \neq 2$, on associe le complexe z' défini par :

$$z' = \frac{z - 10i}{z - 2}$$

1) Mettre z' sous la forme $z' = x' + iy'$, où x' et y' seront exprimés en fonction de x et y.
   Trouver l'ensemble des complexes z tels que :

   a) z' soit un réel
   b) z' soit un imaginaire pur

   Dans chaque cas, représenter les ensembles de points obtenus.

2) Soient A le point d'affixe 2, B celui d'affixe 10i.
   Donner une interprétation géométrique de l'argument de z' et retrouver les résultats de la question 1.

3) a) Calculer $(\frac{5}{2} - 2i)^2$

   b) Déterminer les complexes z solutions de l'équation z'= z
   On obtiendra une équation du second degré en z qu'on écrira sous la forme $(z - \alpha)^2 - \beta^2 = 0$ où α et β sont des complexes à calculer. Finir la résolution de cette équation.

   c) Soient I et J les points images des solutions de 3)b (I est le point qui a une abscisse négative).
   Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OI}}) = (\widehat{\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}})$.

Exercice 3

On considère la fonction numérique définie sur [0,2] par :

$$f(x) = x^2 e^{1-x^2}$$

1) Etudier la fonction f .

2) On appelle C la courbe représentative de f (unité 10 cm)
   On divise l'intervalle [0,2] en 20 parties égales et on appelle A_k le point de C d'abscisse $\frac{k}{10}$, $0 \leq k \leq 20$.

   Calculer les coordonnées des 21 points A_k et tracer C.

Tournez la page S. V. P.

ECOLE POLYTECHNIQUE FEMININE

3) On veut calculer une valeur approchée de $I = \int_0^2 f(x)dx$.
Donner une interprétation géométrique de I.

Sur l'intervalle $\left(\frac{k}{10}, \frac{k+1}{10}\right)$, $0 \leq k \leq 19$, on considère trois quadrilatères :

le rectangle de hauteur $f\left(\frac{k}{10}\right)$.

le rectangle de hauteur $f\left(\frac{k+1}{10}\right)$

le trapèze dont un côté est $\left(A_k, A_{k+1}\right)$

Calculer la surface de chacun de ces trois quadrilatères.
Encadrer I en utilisant les rectangles.
Calculer une valeur approchée de I en utilisant les trapèzes.

PROBLEME

On rappelle que le nombre a (réel ou complexe) est appelé racine du polynôme P(x) si P(a) = 0

On donne les trois polynômes :

$$A(x) = a_0 x^2 + a_1 x + a_2 \qquad \text{avec } a_0, b_0, c_0 \neq 0$$
$$B(x) = b_0 x^2 + b_1 x + b_2$$
$$C(x) = c_0 x^2 + c_1 x + c_2$$

Les constantes $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, c_0, c_1, c_2$ sont réelles et choisies de telle façon que, pour tout x complexe :

$$A^2(x) + B^2(x) = C^2(x)$$

1) Montrer que si deux de ces trois polynômes admettent une racine commune réelle ou complexe, cette racine est aussi racine du troisième.

2) a) Montrer que, si les deux polynômes :

$$C(x) - B(x) \quad \text{et} \quad C(x) + B(x)$$

admettent une racine commune, cette racine est également racine de B(x) et C(x).

b) Montrer que si C(x) a une racine réelle, cette racine est commune à A(x) et B(x).

3) On suppose maintenant que A(x), B(x), C(x) n'ont pas de racine commune.

a) Montrer que C(x) possède deux racines complexes conjuguées.

A partir de l'égalité $A^2(x) = \left[C(x)-B(x)\right]\left[C(x)+B(x)\right]$

Montrer que les polynômes $C(x)-B(x)$ et $C(x)+B(x)$ ont chacun une racine double et que cette racine est réelle.

En déduire que A(x) admet deux racines réelles distinctes, et qu'il en est de même pour B(x).

b) On prend $a_0 = 1$ et l'on suppose connues dans la suite du problème les racines réelles p et q de A(x).
Montrer qu'il existe une infinité de polynômes B(x) et C(x) dépendant du paramètre k, avec
$k = b_0 + c_0$, vérifiant $A^2(x) + B^2(x) = C^2(x)$

c) Montrer que pour tout réel α, tel que $\alpha^2 \neq 1$

$$\frac{\alpha^2 p - q}{\alpha^2 - 1} = p + \frac{p - q}{\alpha^2 - 1}$$

Montrer alors que les racines r et s du polynôme B(x) vérifient la relation :

$$(r + s)(p + q) = 2(pq + rs)$$

et les racines Z et Z' du polynôme C(x) vérifient :

$$(Z + Z')(p + q) = 2(pq + ZZ')$$

d) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé, on considère les points P, Q, R, S, M, M' d'affixes respectives p, q, r, s, Z = X + iY, Z' = X - iY (avec X et Y réels).

Montrer que M et M' sont les points d'intersection des cercles de diamètre [PQ] et [RS]

Soient Ω et Ω' leurs centres.
Montrer que le triangle $M\,\Omega\,\Omega'$ est rectangle en M.

• • •